

TD d'arithmétique (sans calculatrice)

1. Déterminer tous les entiers premiers inférieurs à 30 qui sont congrus à $3 \pmod{4}$.
2. Calculer l'inverse de $65 \pmod{101}$.
3. Calculer $8 * 29 \pmod{33}$, $5 * (-28) \pmod{30}$.
4. Calculer l'inverse de $13 \pmod{29}$.
5. Calculer $51 * 25 \pmod{91}$.
6. Soit $a, b, n, n' \in \mathbb{Z}$ avec $n > 0$ et $n'|n$, Montrer que si $a \equiv b \pmod{n}$, alors $a \equiv b \pmod{n'}$.
7. Soit $d = PGCD(a, b) \neq 0$, Calculer $PGCD(a/d, b/d)$.
8. Déterminer x et y tel que $5x + 17y = 1$.
9. Résoudre dans \mathbb{Z} : $5x + 4 \equiv 7 \pmod{19}$
10. Résoudre dans \mathbb{Z} : $5x + 4 \equiv 7 \pmod{15}$
11. Résoudre dans \mathbb{Z}_{18} : $16x + 4 = 7$
12. Résoudre dans \mathbb{Z}_{18} : $16x + 5 = 7$
13. Quels sont les ordres possibles des éléments de \mathbb{Z}_{14}^* ?
14. Quel est le dernier chiffre de $(257!)$?
15. $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2, +, (0, 0))$ est-il un groupe cyclique?
16. $2\mathbb{Z}$ est-il un sous groupe additif de \mathbb{Z} ? Déterminer le coset de $2\mathbb{Z}$ dans \mathbb{Z} contenant 1. Déterminer $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
17. Déterminer un générateur de \mathbb{Z}_9^* , et de \mathbb{Z}_{11}^* .
18. Soit $G = (\mathbb{Z}_6, +)$, déterminez un sous groupe propre de G (sous groupe différent de G).
19. Déterminer les diviseurs de zéro de \mathbb{Z}_{30} (les non inversibles).
20. Montrez qu'un groupe où tous les éléments sont involutifs (cad $a^2 = e$) est abélien.
21. Cherchez le groupe des inversibles de \mathbb{R}^2 muni de la loi

$$(a, b)(c, d) = (ac, bc + d).$$
22. $(\mathbb{Z}_6, +, 0)$ est-il isomorphe à $(\mathbb{Z}_{12}^*, \cdot, 1)$? Trouver un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot, 1)$.
23. Trouver un groupe multiplicatif isomorphe à $(\mathbb{Z}_6, +, 0)$
24. Soit $G = \{0, a, b, c\}$ un ensemble muni d'une loi additive définie par sa table :

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Cette structure est-elle un groupe?

Soit $H = \{0, a\}$ un ensemble muni d'une loi additive définie par sa table :

+	0	a
0	0	a
a	a	0

Montrer que $(H, +)$ est un groupe isomorphe à Z_2 .

$(H, +)$ est-il un sous-groupe de $(G, +)$?

$(G, +)$ est-il isomorphe au groupe $(G', *)$ de quatre éléments dont la loi $*$ est telle que $x*x = 0, \forall x \in G'$?

25. Soit $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupes (finis). Montrer que $Im(\phi)$ est un sous-groupe de G_2 .
26. Montrer que $C_x = \{y \in G \mid xy = yx\}, x \in G$, est un groupe de G (G étant un groupe fini).
27. Calculer $\phi(35)$ et $\phi(28)$.