SUITES

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, $\{0, 1, 2, ..., n, ...\}$, est la suite modèle. Soit E un ensemble infini muni d'une addition associative (x, y et z dans E) :

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$$

ayant un élément neutre ($x+0 = 0+x = x$) et pour laquelle tout élément $x \in E$ admet dans E un opposé noté $-x$ ($x + (-x) = 0$), faisant de E un groupe additif. C'est souvent un ensemble de nombres, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une **suite** dans E est définie par une application :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & E \\ & n & \mapsto & u_n, \end{array}$$

u_n étant le **terme général** de la suite, notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplement $(u_n)_n$, et $\mathbb{N}$ étant l'ensemble des indices (ainsi 3 est l'indice du terme u_3). Notons bien que la suite n'est pas en général un groupe.

Donnons des exemples de suites réelles.

Une suite peut être définie directement, comme $u_n = 1/(n + 1)$.

Elle peut être **arithmétique** : $u_{n+1} = u_n + b$, $b \in E$ et on en connaît alors tous les termes à partir de u_0 et de b : $u_n = u_0 + nb$.

Elle peut être **géométrique**, de **raison** r et de premier terme u_0 : $u_{n+1} = ru_n$, d'où $u_n = r^n u_0$.

Elle peut être **arithmético-géométrique** : $u_{n+1} = ru_n + b$, d'où :

$$u_n = r^n u_0 + (r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1)b.$$

Elle peut être définie par une somme : $u_n = a_0 u_{n-1} + a_1 u_{n-1} + \cdots a_k u_{n-k}$, comme la suite de Fibonacci : $u_0 = u_1 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

La suite réelle $(u_n)_n$ est croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n-1}$, strictement croissante si $u_n > u_{n-1}$. Elle est décroissante si $u_n \leq_{n-1}$, strictement décroissante si $u_n < u_{n-1}$. Dans ces différents cas, elle est monotone.

La suite réelle $(u_n)_n$ est **bornée** s'il existe des réels m, son **minorant**, et M, son **majorant**, tels que pour tout n $m \leq u_n \leq M$. Si elle est complexe, elle est majorée par M, réel positif, si $|u_n| \leq M$.

La suite $(u_n)_n$ **converge**, et sa **limite** est $l \in E$, ce qui se note $\lim(u_n) = l$ ou $u_n \to 0$, si, quel que soit $\epsilon > 0$ (aussi petit qu'on veut) il existe un entier N tel que $n > N$ (ou $n \geq N$) implique $|u_n - l| < \epsilon$ (ou $|u_n - l| \leq \epsilon$). Si elle n'a pas de limite, elle **diverge**. Ainsi, les suites de terme général $(-1)^n$ et $\sqrt{n}$ divergent ; la première est bornée, la seconde tend vers l'infini.

La suite $(u_n)_n$ est une **suite de Cauchy** si elle vérifie le critère de Cauchy : quel que soit $\epsilon > 0$ (aussi petit qu'on veut) il existe un entier N tel que, quel que soient les entiers p et q supérieurs à N, $|u_p - u_q| < \epsilon$. La relation :

$$(u_n)_n \text{ est de Cauchy} \iff (u_n)_n \text{ converge}$$

permet de savoir que $(u_n)_n$ converge sans connaître sa limite. Considérons la suite de terme général $u_n = 1/(n+1)^2$. Elle est strictement décroissante.On a, si $q = p + m$, $m > 0$:

$$u_p - u_{p+m} \leq \int_{p+1}^{p+m+2} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+m+2} < \frac{1}{p+1},$$

et si $p > 1/\epsilon$, alors $u_p - u_{p+m} \leq \epsilon$, quel que soit m. La suite (strictement décroissante) est donc de Cauchy, et converge.

Si $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, la suite de terme général $v_n = u_{p(n)}$ est une **suite extraite**, ou **sous-suite**, de $(u_n)_n$. Ainsi, la suite de terme général $\sqrt{2n}$ est extraite de la suite de terme général $(-1)^n\sqrt{n}$, la fonction d'extraction étant $p(n) = 2n$.

La suite $(u_n)_n$ admet une **valeur d'adhérence** a si on peut en extraire une sous-suite de limite a. Toute suite bornée admet (au moins) une valeur d'adhérence. La suite de terme général $(-1)^n + 1/(n+1)$ admet deux valeurs d'adhérence, 1 et -1. La limite d'une suite convergente est son unique valeur d'adhérence. Tout intervalle ouvert contenant la limite ou une valeur d'adhérence d'une suite contient une infinité de termes de cette suite.

Voyons les principaux critères de convergence.

Le **critère de Cauchy** ci-dessus.

Une suite **monotone bornée** converge.

Une suite bornée ayant une seule valeur d'adhérence converge.

Le **critère des gendarmes** : si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, $u_n \leq v_n$, convergent en encadrant (w_n) $(u_n \leq w_n \leq v_n)$ et si $v_n - u_n \to 0$, alors les trois suites convergent vers une même limite.

Le **critère des suites adjacentes** : $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont **adjacentes** si les quatre conditions sont remplies (1) $u_n < v_n$, (2) $(u_n)_n$ est croissante, (3) $(v_n)_n$ est décroissante et (4) $v_n - u_n \to 0$. Les deux suites sont alors convergentes et ont même limite.

Une suite complexe $(z_n)_n$ se décompose en deux suites réelles, $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ si $z_n = x_n + iy_n$. Elle converge si la suite des modules, $(|z_n|)_n$ converge, c'est-à-dire si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergent.