Espace vectoriel, sous-espace vectoriel

Un groupe commutatif $(E,+)$ est un **espace vectoriel** sur un corps $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, si $\mathbb{K}$ opère sur E par une loi externe :

$$\begin{array}{rcl} K \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$$

obéissant aux conditions :

$$\begin{cases} 1.x = x\,, \quad \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y\,, \\ (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x\,, \quad \lambda.(\mu.x) = \lambda\mu.x\,, \end{cases}$$

quels que soient les éléments x et y de E et λ et μ de $\mathbb{K}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires** et ceux de E, **vecteurs**. Le corps $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même, et $\{0\}$ est un espace vectoriel, dit trivial, sur n'importe quel corps.

Un **sous-espace vectoriel** d'un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$ est une partie non vide F de E, qui est un sous-groupe du groupe $(E,+)$, stable pour la multiplication par les éléments de $\mathbb{K}$:

$$\begin{array}{lcl} F \neq \emptyset\,, & & \\ x \in F\,,\ y \in F & \Rightarrow & x - y \in F\,, \\ \lambda \in \mathbb{K}\,,\ x \in F & \Rightarrow & \lambda.x \in F\,. \end{array}$$

L'espace vectoriel trivial $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, il suffit de montrer, si cela est possible, que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, car il y a moins d'axiomes à vérifier.

La multiplication externe a été notée d'un point pour la distinguer de la multiplication entre éléments du corps ; ceci étant compris, on allège l'écriture en écrivant si possible λx pour $\lambda . x$.

On définit la **somme** de deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E :

$$F_1 + F_2 = \{x \in E \,|\, \exists x_i \in E_i : x = x_1 + x_2\}$$

qui est un sous-espace vectoriel de E. Cette loi est associative. La somme est **directe** si la décomposition en (x_i) est unique, c'est-à-dire si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$; on la note alors $F_1 \oplus F_2$.

Si $F_1 \oplus F_2 = E$, les sous-espaces vectoriels sont dits **supplémentaires**. Tout sous-espace vectoriel admet des supplémentaires.

On définit également le **produit** de deux espaces vectoriels E_1 et E_2 :

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2) \,|\, x_i \in E_i\}$$

qui, muni des opérations :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \\ \lambda.(x_1, x_2) &= (\lambda . x_1, \lambda . x_2)\,, \end{aligned}$$

est un espace vectoriel. On peut définir la somme ou le produit d'un nombre quelconque de sous-espaces ou d'espaces vectoriels ; par exemple :

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \cdots \times \mathbb{K} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{K}\}\,,$$

qui joue un rôle très important.

L'intersection $F_1 \cap F_2$ de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. Leur réunion n'est un sous-espace vectoriel que si l'un des sous-espaces est contenu dans l'autre.

1 Combinaison linéaire, base, dimension

Une **combinaison linéaire** dans un espace vectoriel E est une somme finie $\sum \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $x_i \in E$. L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ de l'espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel noté $\mathrm{vect}(x_i)$ (on lit « vectoriel (x_i) ») ; même si la famille des x_i est infinie, une combinaison linéaire porte toujours sur un nombre fini d'éléments.

Une **base** de l'espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ est une famille, finie ou non, d'éléments (e_i) de E telle que tout élément de E peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire des e_i, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \forall x \in E\,,\ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i \\ \sum \mu_i\, e_i = 0 \iff \forall i\,,\ \mu_i = 0. \end{cases}$$

La première condition exprime que la famille est **génératrice**. La seconde, équivalente à l'unicité de la décomposition de x sur les e_i, signifie que la famille (e_i) est **libre**.
Supposons la famille génératrice mais non libre, **liée** par un nombre fini de combinaisons linéaires : on a $\sum \mu_i e_i = 0$ où les μ_i ne sont pas tous nuls ; chaque combinaison linéaire permet d'exprimer l'un des e_i en fonction des autres et donc de l'éliminer. Quand on les a toutes utilisées, les e_i restants forment une base. Dans l'autre sens, si la famille est libre mais non génératrice, on peut la compléter en une base par ajouts successifs de vecteurs libres.

Tout espace vectoriel E admet des bases. Ces bases ont toutes le même cardinal qui est sa **dimension**, $\dim(E)$.