Application linéaire

Si E et F sont des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, une application $u : E \to F$ est linéaire si, quels que soient les éléments x et y de E et les scalaires λ et μ, on a :

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda\, u(x) + \mu\, u(y)\,.$$

On définit le **noyau**, $\mathrm{Ker}(u)$, et l'**image**, $\mathrm{Im}(u)$, de l'application linéaire par :

$$\mathrm{Ker}(u) = \overset{-1}{u}(0) = \{x \in E \,|\, u(x) = 0\}\,,$$

$$\mathrm{Im}(u) = u(E) = \{y \in F \,|\, \exists\, x \in E : u(x) = y\}\,.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels, respectivement, de E et de F. L'application linéaire est **injective** si $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, **surjective** si $\mathrm{Im}(u) = F$; elle est **bijective** si ces deux conditions sont remplies. La dimension de $\mathrm{Im}(u)$ est le **rang** de u, noté $r_g(u)$.

La **base canonique** de $\mathbb{K}^n$ est la famille (e_i), $1 \leq i \leq n$, les coordonnées de e_i étant nulles sauf la i-ème, égale à 1 ; δ_{ij} étant le **symbole de Kronecker**, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$, on a :

$$e_i = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq n}\,.$$

Une application linéaire bijective u est un **isomorphisme** ; u^{-1}, l'application réciproque, est également linéaire : c'est un isomorphisme.

Tout espace vectoriel E de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, qui est donc le modèle d'espace vectoriel de dimension n.

Une application linéaire de E dans lui-même est un **endomorphisme**. Un endomorphisme bijectif est un **automorphisme**.

Notons que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(E)$.

Plus généralement, si A et B sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$.

Une **forme linéaire** sur est une application linéaire de l'espace vectoriel E sur le corps de base $\mathbb{K}$. Leur ensemble noté E^* est le **dual** de E.