TD de mathématiques (Applications linéaires, matrices)

1. Parmi les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ lesquelles sont-elles $\mathbb{Q}$-linéaires, $\mathbb{R}$-linéaires, $\mathbb{C}$-linéaires ? $f_1(z) = z + a$; $f_2(z) = az$; $f_3(z) = Re(z)$; $f_4(z) = Im(z)$.

2. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que :

   (a) Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ engendre E alors $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$ engendre $\operatorname{Im} f$.

   (b) Si $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_2)\}$ est libre, alors $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ est libre.

3. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que f est injective si et seulement si $\dim E = \dim \operatorname{Im} f$.

4. Déterminer le rang des matrices suivantes (resp. dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{F}_2$):

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Calculer $A.v$ avec $v = (1, 2, 3)$. On considère maintenant que B est une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$. Calculer $A.B$.

5. Calculer le déterminant de la matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.
   La matrice A est-elle inversible ?

6. Soient $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (1, 1)$, $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\{e_1, e_2\}$, $\{f_1, f_2, f_3\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.
   Donner la matrice de l'application linéaire
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \to (x, x + y, 2x)$ par rapport à ces bases.

7. Donner la matrice de l'application linéaire
   $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \to (y + z, x + z, x + y)$ par rapport à la base canonique.