TD de mathématiques (espaces vectoriels)

1. Dans $\mathbb{R}^2$ on définit l'addition et la multiplication par un scalaire comme suit :

   (a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$; $\lambda(a, b) = (\lambda a, b)$.

   (b) $(a, b) + (c, d) = (a, b)$; $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$.

   (c) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$; $\lambda(a, b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b)$.

   Vérifier dans chaque cas s'il s'agit d'un espace vectoriel.

2. Examiner si $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$.

3. Parmi les sous-ensembles suivants de E, lesquels sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

   (a) $E = \mathbb{R}^4$. $E_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 = 1\}$,
   $E_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 = 0\}$,
   $E_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_2 = x_3 = x_4 = 0\}$,
   $E_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 \neq x_2\}$.

   (b) $E = \mathbb{F}_2[x]$. $E_1 = \{P \in E|degre(P) < 3\}$,
   $E_2 = \{P \in E|degre(P) = 0\}$,
   $E_3 = \{P \in E|degre(P) = 1\}$.

   (c) $E = \mathbb{R}[x]$. $E_1 = \{P \in E|degre(P) < n, n \in \mathbb{N}\}$,
   $E_2 = \{P \in E|degre(P) = n, n \in \mathbb{N}\}$.

4. Parmi les systèmes suivants de E examiner lesquels sont libres, générateurs, bases :

   (a) $E = \mathbb{R}^3$. $E_1 = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 2), (-2, 1, 2)\}$,
   $E_2 = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 2), (0, 1, 3)\}$, $E_3 = \{(1, 0, 1), (2, 0, 3)\}$,
   $E_4 = \{(1, 0, 1), (2, 0, 3), (-1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

   (b) $E = \mathbb{F}_2^3$. $E_1 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$,
   $E_2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, $E_3 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$,
   $E_4 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

(c) $E = \{P \in \mathbb{R}[x], degre(P) < 3\}$, $E_1 = \{1, x-\alpha, (x-\alpha)^2\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^4$:

   (a) E_1 est engendré par $u_1 = (1, 2, -3, 4)$, $u_2 = (2, 4, -5, 1)$, $u_3 = (-2, -1, 2, 0)$, $u_4 = (3, 0, -1, -4)$.

   (b) $E_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = 2x_2 - x_3, x_4 = x_1 + x_2 + x_3\}$.

6. Calculer le rang des systèmes suivants :

   (a) Dans $\mathbb{R}^4$, $u_1 = (1, 2, -4, 3), u_2 = (2, 5, -3, 4)$, $u_3 = (6, 17, -7, 10), u_4 = (1, 3, -3, 2)$.

   (b) Dans $\mathbb{F}_2$ $u_1 = (1, 0, 0, 1), u_2 = (0, 0, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 0, 1), u_4 = (1, 1, 0, 0)$.

   (c) Dans $\mathbb{R}^4$, $u_1 = (1, 1, a, 0), u_2 = (1, a, 1, 0)$, $u_3 = (a, 1, 1, 0)$, $a \in \mathbb{R}$.

7. Sommes directes :

   (a) Dans $\mathbb{R}^3$ soit $E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 = x_3\}$, $E_2 = \{(0, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

   (b) Dans $E = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid degre(P) < 5\}$ soit
   $E_1 = \{P \in E \mid P(-x) = P(x)\}$ et
   $E_2 = \{P \in E \mid P(-x) = -P(x)\}$. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.