TD 4 de mathématiques

1. Quel est l'ordre du groupe additif Z_n? Quel est celui du groupe multiplicatif Z_n^*?
2. Montrer que Z_{11}^* est cyclique. $(Z_{15}^*, ., 1)$ est-il un groupe cyclique? pourquoi? et $(Z_{18}^*, ., 1)$?
3. Soit G un groupe abélien et soit m un entier. Montrer que $mG := \{ma \ : \ a \in G\}$ est un sous groupe de G.
4. Soit $G = (Z_6, +)$, déterminez un sous groupe propre de G (sous groupe différent de G).
5. Montrez qu'un groupe où tous les éléments sont involutifs (cad $a^2 = a$) est abélien.
6. Cherchez le groupe des inversibles de R^2 muni de la loi
$$(a, b)(c, d) = (ac, bc + d).$$
7. Soit H_1 et H_2 deux sous groupes d'un groupe G abélien. Montrer que H_1+H_2 est un sous groupe avec $H_1+H_2 := \{h_1+h_2 \ : \ h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$.
8. Le groupe $(Z_3, +, 0)$ est-il un sous groupe de $(Z_{15}, +, 0)$?
9. Soit G un groupe abélien. Soit m un entier, montrer que la fonction qui envoie $a \in G$ vers $ma \in G$ est un homomorphisme de groupe de G dans lui-même.
10. Le groupe $(Z_8, +, 0)$ est-il isomorphe à $(Z_{30}^*, ., 1)$? idem avec $(Z_6, +, 0)$ et $(Z_{14}^*, ., 1)$.
11. Quels sont les générateurs du groupe cyclique additif Z?
12. Sachant que tous les éléments de Z_{15}^* ont un ordre multiplicatif qui divise 4, est-il possible de savoir si Z_{15}^* est cyclique?

13. Soit $G = \{0, a, b, c\}$ un ensemble muni d'une loi additive définie par sa table :

$+$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Cette structure est-elle un groupe?
Soit $H = \{0, a\}$ un ensemble muni d'une loi additive définie par sa table :

$+$	0	a
0	0	a
a	a	0

Montrer que $(H, +)$ est un groupe isomorphe à Z_2.
$(H, +)$ est-il un sous-groupe de $(G, +)$?

14. Soit $\phi : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes (finis). Montrer que $Im(\phi)$ est un sous-groupe de G_2. Montrer que $\ker(\phi)$ est un sous groupe de G_1. Montrer que ϕ est injective si et seulement si $\ker(\phi) = e_{G_1}$ (e_{G_1} étant le neutre de G_1) et que ϕ est surjective si $Im(\phi) = G_2$.

15. Montrer que $C_x = \{y \in G | \ xy = yx\}, \ x \in G$, est un groupe de G (G étant un groupe fini).