MATRICES ET DÉTERMINANTS

Table des matières

1 Matrice

Bézout (1730-1783) a introduit les déterminants, définis ensuite axiomatiquement par Kronecker (1823-1891) et Weierstrass (1815-1897). Cayley (1821-1895) a introduit le calcul matriciel. Matrices et déterminants ont ouvert la voie à l'algébre linéaire moderne.

Une **matrice** M appartenant à $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ (corps ou anneau) à m lignes et n colonnes ; le scalaire à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté m_{ij} et la matrice elle-même est notée $M = (m_{ij})$.

On définit la **somme** de deux matrices, (a_{ij}) et (b_{ij}), comme étant la matrice (m_{ij}) avec $m_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, et le produit par un scalaire λ : $\lambda\,(m_{ij}) = (\lambda\, m_{ij})$.

L'élément neutre de cette opération est la matrice $0_{m,n}$ dont tous les termes sont nuls. L'opposée de la matrice $(m_{i,j})$ est la matrice $(-m_{i,j})$.

Voici une matrice de $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{F}_3)$, A, et une matrice de $\mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{F}_3)$, B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Elles ont six coordonnées et peuvent être assimilées à des vecteurs de $\mathbb{F}_3^6$, de sorte que $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{F}_3)$ et $\mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{F}_3)$ sont des espaces vectoriels de dimension 6 sur $\mathbb{F}_3$. Plus généralement, $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, si $\mathbb{K}$ est un corps, est un espace vectoriel de dimension mn ; si $\mathbb{K}$ est un anneau, $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est un module sur $\mathbb{K}$.

Le **produit** des matrices se fait « lignes par colonnes » , et le nombre de lignes de la seconde matrice doit être égal au nombre de colonnes de la première. Effectuons par exemple le produit AB :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+2.2+0.0 & 1.2+2.0+0.1 \\ 2.1+0.2+1.0 & 2.2+0.0+1.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Ceci s'écrit en notation abstraite :

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (m_{ij}) \, , \text{ avec } m_{ij} = \sum_k a_{ik} \, b_{kj} \, .$$

La forme linéaire :

$$(x_i)_{1 \leq i \leq n} \mapsto a_1 \, x_1 + \cdots + a_n \, x_n$$

est représentée par la matrice à une ligne (m_{1j}), $m_{1j} = a_j$, et le vecteur (x_i) par la matrice à une colonne (m_{i1}), $m_{i1} = x_i$.

2 Matrice carrée

Si $m = n$, les matrices sont dites **carrées** ; on peut les multiplier entre elles et leur ensemble, noté $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, muni de l'addition et de la multiplication, est un anneau non commutatif et non intègre.

L'élément neutre pour la multiplication est la matrice (δ_{ij}), δ_{ij} étant le symbole de Kronecker, égal à 1 si $i = j$ et à 0 sinon. Cette matrice, dite **identité**, est notée I_n (en dimension n).

Si $AB = I_n$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, A et B sont **inverses** l'une de l'autre.

Une matrice de la forme $m_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ est dite **diagonale**, et **scalaire** si les λ_i sont égaux. Si $m_{ij} = m_{ji}$, c'est-à-dire si les termes symétriques par rapport à la **diagonale principale** (m_{ii}), sont égaux, la matrice est dite **symétrique**. Ainsi la matrice :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

est symétrique, et sa diagonale principale est $(1, 2)$.

3 Déterminant d'une matrice carrée

Le produit :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad - bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (ad - bc)\, I_2$$

montre que l'inverse de la première matrice est la seconde divisée par $ad - bc$. Ce terme est le **déterminant** de la première matrice. Celle-ci est donc inversible ssi son déterminant n'est pas nul. Le déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{ij})$, que nous allons définir dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, est noté $\det A$ ou $|a_{ij}|$.

Supposons que nous savons calculer le déterminant des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. En supprimant la i^{me} ligne et la j^{me} colonne de A, dont l'intersection est $\{a_{ij}\}$, on obtient une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont le déterminant, noté $\boxed{a_{ij}}$, est le **mineur** associé à a_{ij}. On a alors :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j_1} a_{1j} \boxed{a_{ij}}.$$

Ainsi :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Une permutation de lignes ou de colonnes change le signe du déterminant.

Cette méthode nécessite un trop grand nombre d'opérations lorsque n est grand (de l'ordre de $n!$) . Nous verrons un algorithme beaucoup moins gourmand (polynomial).

4 Matrice de Vandermonde

Les matrices de **Vandermonde** sont utilisées dans différentes branches des mathématiques ; donnons-en la définition adaptée au domaine des corps finis. Soit α un élément primitif de $\mathbb{F}_q$, avec $q = 2^m$ et $n = q - 1$; la matrice de Vandermonde $V(x)$, pour $x = \alpha^k$, $1 \leq k \leq n-1$, est la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{F}_q)$ de terme général $v_{ij} = x^{(i-1)(j-1)}$:

$$V(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x^{n-1} & \dots & x^{(n-1)^2} \end{bmatrix}.$$

Notons bien que x doit être différent de 0 et de 1.

L'inverse de $V(x)$ est $V(x^{-1})$.

5 Matrice associée à une épplication linéaire

Considérons des espaces vectoriels E et F de bases respectives $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$; une matrice $M = (m_{ij})$ est dite **associée** à une application linéaire $u \in \text{Ł}(E, F)$ si sa j-ème colonne est l'image de e_j exprimée dans la base (f_k). On dit aussi que l'application linéaire u est représentée par la matrice M, que l'on peut noter $M(u)$. Ainsi la matrice B ci-dessus est associée à l'endomorphisme $u \in \text{Ł}(\mathbb{F}_3^2, \mathbb{F}_3^3)$

défini par $u(1,0) = (1,2,0)$ et $u(0,1) = (2,0,1)$, c'est-à-dire :

$$u(e_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = f_1 + 2f_2\,,$$

et :

$$u(e_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2f_1 + f_3\,.$$

On vérifie facilement que :

$$\begin{array}{rcl} M(u) = 0 & \Longleftrightarrow & u = 0\,, \\ M(u+v) & = & M(u) + M(v)\,, \\ M(v \circ u) & = & M(v)M(u) \\ M(\lambda u) & = & \lambda M(u) \end{array}$$

lorsque ces écritures sont définies, de sorte que l'application :

$$\begin{array}{rccc} M: & L(E,F) & \to & \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ & u & \mapsto & M(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Si $E = F$, c'est un isomorphisme d'algèbres.

La matrice de l'identité de E est l'élément neutre I_n. Si M est la matrice associée à un isomorphisme u, on définit son **inverse** M^{-1} comme étant la matrice associée à u^{-1} ; on a donc :

$$MM^{-1} = M(u)M(u^{-1}) = M(u \circ u^{-1}) = M(I_E) = I_n\,.$$

La **transposée** de la matrice $M = (m_{ij})$, associée à une application linéaire u, est la matrice associée à la transposée de u, ${}^tu$:

$${}^t(M(u)) = M({}^tu)\,.$$

On vérifie que ${}^tM = (m'_{ij})$, avec $m'_{ij} = m_{ji}$, les lignes de M devenant les colonnes de ${}^tM$; ainsi, les matrices A et B du début du paragraphe sont chacune la transposée de l'autre. La transposée est parfois notée M^T. On montre sans peine, lorsqu'elles sont définies, les relations :

$$\begin{aligned} {}^t(MN) &= {}^tN\,{}^tM\,, \\ {}^t({}^tM) &= M\,, \\ {}^t(M^{-1}) &= ({}^tM)^{-1}\,. \end{aligned}$$

Le **rang** d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes, ou ses lignes, par transposition. C'est le rang de l'application linéaire associée.

Si $\dim E = \dim F$, le déterminant d'une matrice est le déterminant de application linéaire associée.

6 Forme normale d'une matrice

La **forme normale** d'une matrice $M \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de rang r, représentant une application linéaire u de E dans F, est la matrice $I_{m,n,r}$ dont les seuls coefficients non nuls sont les r premiers termes de la diagonale, égaux à 1. On montre l'existence de la forme normale en changeant de bases ; on construit une base $(e_1, \ldots, e_r)$ d'un supplémentaire du noyau de u, et on pose $f_i = u(e_i)$, pour obtenir une base de l'image de u, que l'on complète en une base $(f_1, \ldots, f_m)$ de F ; la matrice de u dans ces bases a la forme annoncée.

Remarquons que la forme normale existe toujours, mais qu'elle peut nécessiter une permutation des colonnes de la matrice, traduisant une permutation de vecteur de la base de E, ou une permutation des lignes, traduisant la permutation des vecteurs de la base de F. Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Une matrice et sa transposée ont donc même rang, de même qu'une application linéaire et sa transposée

Notons P_E et P_F les matrices associées aux changements de bases effectués dans E et dans F ce sont des automorphismes). Chacune transforme l'écriture d'un vecteur dans une base en son écriture dans une autre base : P_E (respectivement P_F) représente donc l'identité de E (respectivement de F) dans ces bases. Ces matrices sont évidemment inversibles. On peut alors écrire :

$$M = P_F^{-1}\, I_{n,m,r}\, P_E \,,$$

et :

$${}^tM = {}^tP_E\, I_{m,n,r}\, {}^tP_F^{-1} \,.$$

Voyons un algorithme donnant la forme normale d'une matrice, et son déterminant si elle est carrée.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée à coefficients dans un anneau intègre K, à n lignes (notées L_i, $1 \leq i \leq n$) et autant de colonnes (notées C_i, dont aucune ligne ni aucune colonne n'est nulle. Nous faisons les calculs dans $\mathbb{F}$, le corps des fractions de K. Les transformations suivantes sont permises :

- permutation de deux lignes ou de deux colonnes,

- ajout à une ligne d'une combinaison linéaire d'autres lignes,

- ajout à une colonne d'une combinaison linéaire d'autres colonnes, les combinaisons linéaire à ajouter à L_i, ou à C_i, doivent porter sur des lignes, ou des colonnes, d'indices supérieurs à i dans la partie descendante du processus, d'indices inférieurs dans la partie remontante. Les permutations de lignes ou de colonnes correspondent à des permutations sur les vecteurs des bases.

On suppose que a_{11} n'est pas nul (grâce éventuellement à une permutation de lignes ou de colonnes), et on annule les a_{i1} pour $i \geq 2$ en remplaçant L_i par $L_i + a_{i1}\, a_{11}^{-1}\, L_1$. On recommence en partant de a_{22}

(supposé non nul, quitte à remplacer L_2 par L_k, ou, si les a_{k2} sont tous nuls, C_2 par C_k, $k > 2$), et sans utiliser ni modifier L_1, pour annuler les a_{i2}, $i \geq 3$, ainsi de suite jusqu'à avoir annulé tous les termes au-dessous de la diagonale principale ; à chaque opération on gagne une ligne à laquelle on ne touche plus, et dont les termes sont nuls pour $j < i$.

Le processus, dans sa phase descendante, s'arrête si, au-delà d'un certain niveau r (le rang de la matrice), on ne peut trouver (par permutation) un a_{ll} non nul, ou bien lorsqu'on est arrivé à la dernière ligne.

Le rang $r = r_g(A)$ de la matrice est alors égal au nombre de termes diagonaux non nuls.

Si $r = n = m$, la matrice est inversible (dans $\mathbb{F}$). Son déterminant est égal au produit des a_{ii} par lesquels on a divisé les lignes pour obtenir des 1.

En renversant alors le processus, c'est-à-dire en remontant, on annule les a_{ij} pour $j > i$, sans toucher aux termes diagonaux, et la matrice est mise sous forme diagonale (à ne pas confondre avec la diagonalisation d'un endomorphisme par valeurs propres et vecteurs propres.

Si L_i désigne la i-ème ligne, la transformation $L_i+\lambda L_j$ signifie qu'on ajoute λL_j à L_i, λL_i signifie qu'on multiplie L_i par λ, enfin $L_i \leftrightarrow L_j$ signifie qu'on permute L_i et L_j. Idem pour les colonnes. On obtient pas à pas (dans $\mathbb{R}$) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \\ \mapsto \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \mapsto \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 + L_2 \\ \mapsto \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_5 - C_2 \\ C_4 + C_2 \\ \mapsto \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_4 - C_1 \\ C_3 - 2C_1 \\ \mapsto \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 + L_2 \\ -L_2 \\ \mapsto \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la dernière forme étant normale (dans $\mathbb{R}$) .

La matrice :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

est-elle inversible dans $\mathbb{F}_2$? Dans $\mathbb{F}_3$? Calculer son inverse lorsqu'il existe.

Le noyau de l'application linéaire associée, u, est formé des vecteurs (x, y, z) tels que :

$$x + z = y + z = x + y = 0 \,.$$

Dans $\mathbb{F}_2^3$, on a la solution $x = y = z = 1$, et $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{vect}((1, 1, 1))$; u n'est pas inversible. Dans $\mathbb{F}_3^3$ ou dans $\mathbb{R}$, le système n'a pas de solution non nulle, u est injective, et donc bijective et l'inverse existe. La méthode la plus économique (surtout en grande dimension) pour calculer M^{-1} est la méthode de Gauss : on part du couple $(M\ ,\ I_3)$ et, grâce aux transformations « gaussiennes » sur les lignes et les colonnes, on arrive au couple $(I_3\ ,\ M^{-1})$; faisons successivement subir à :

$$(M\ ,\ I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

les transformations : $L_3 - L_1 - L_2$ en descendant, puis $L_2 - L_3$ et $L_1 - L_3$ en remontant, pour obtenir :

$$(I_3\,,\ M^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$